



Radiographie par les rayons cosmiques

Loïc Manceau

► To cite this version:

| Loïc Manceau. Radiographie par les rayons cosmiques. 2004, pp.1-46. in2p3-00023652

HAL Id: in2p3-00023652

<https://hal.in2p3.fr/in2p3-00023652>

Submitted on 25 Jan 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RAPPORT DE STAGE JANUS :

RADIOGRAPHIE PAR LES RAYONS
COSMIQUES.

Manceau loïc

Juillet 2004 –Octobre 2004

INTRODUCTION

Mon travail lors du stage Janus, qui s'est déroulé au Laboratoire de Physique Corpusculaire de l'Université Blaise Pascal de Clermont-Ferrand, portait sur l'utilisation des muons cosmiques pour la radiographie de volumes de matière indéterminée.

La première partie est bibliographique. Elle permet de présenter les particules élémentaires, de rappeler ce qu'est un muon et plus particulièrement un muon cosmique. Ensuite on étudie les interactions d'une particule chargée comme le muon avec la matière. Puis on présente quelles sont les applications de ces interactions.

On peut distinguer deux applications :

- la radiographie par absorption des muons par la matière. Celle-ci est déjà assez répandue. Nous en ferons simplement l'historique et nous en rappellerons le principe.
- La radiographie par diffusion des muons à travers la matière. C'est une technique nouvelle dont nous verrons les avantages, les applications ainsi que son principe de manière approfondie.

La seconde partie consiste à résoudre certains problèmes survenant lors de la radiographie par diffusion de muons. Pour élaborer cette image on utilise une simulation informatique relativement simple réalisée grâce au programme GEANT4. Cette simulation consiste au calcul des trajectoires de 10000 muons au travers d'un volume donné, comprenant des objets massifs. A l'entrée et à la sortie du volume les trajectoires des muons sont mesurées par des plans détecteurs donnant les coordonnées (x,y,z) du passage des muons dans ces plans.

- Le premier problème consiste à trouver le moyen de voxeliser (c'est-à-dire de « pixéliser ») le volume.
- La résolution du second problème doit permettre de définir le point d'approche au plus près des trajectoires des muons mesurées à l'entrée et à la sortie du volume radiographié plus près et de calculer ses coordonnées.

CHAPITRE 1 : LES PARTICULES EN GENERAL, LE MUON EN PARTICULIER.

a) présentation des particules :

On distingue deux types de particules élémentaires : les fermions et les leptons.

1) Les fermions :

On définit les fermions comme des particules qui obéissent au principe d'exclusion de Pauli. Ils constituent la matière.

Les fermions peuvent être décomposés en deux catégories :

- Les fermions élémentaires constitués des quarks et des leptons (électrons, muons, neutrinos)
- Les fermions composés constitués des hadrons.

La famille des hadrons se décompose en deux :

- Les mésons comme les kaons ou les pions que l'on peut encore séparer en tetraquarks constitués de deux quarks et deux antiquarks et les pentaquarks constitués de quatre quarks et un antiquarks.
- Les baryons qui ont un spin demi entier et qui sont composés de trois quarks et que l'on peut différencier en nucléons (protons, neutrons) et en hyperions.

On peut aussi classer les fermions selon leur mode d'interaction. Voici un tableau qui résume ce classement :

	Sensibilité à la gravitation	Sensibilité aux forces électromagnétiques	Sensibilité à l'interaction faible	Sensibilité à l'interaction forte
Lepton chargé	oui	oui	oui	non
Lepton non chargé	oui	non	oui	non
Hadron chargé	oui	oui	oui	oui
Hadron non chargé	oui	non	oui	oui

2) Les bosons :

Les bosons ont un comportement collectiviste (ils ne peuvent pas être décrits séparément). Ce sont les médiateurs des interactions c'est-à-dire des forces.

Il existe 4 forces dans la nature : l'interaction forte, l'interaction faible, la force électromagnétique et la gravité.

Le photon est le vecteur de la force électromagnétique, le gluon est porteur de l'interaction forte entre quarks, W^+ , Z^0 est porteur de l'interaction faible responsable de certaine forme de désintégrations radioactives. Les recherches actuelles visent à donner la preuve expérimentale du boson de Higgs médiateur des interactions gravitationnelles.

Les bosons peuvent parfois être eux même sensibles aux interactions comme le photon qui est sensible à la gravité.

b) Présentation des muons :

Les muons appartiennent à une même famille de fermions : les leptons. Ils sont donc insensibles à l'interaction forte. Ceci leur permet de traverser la matière car ils interagissent peu avec les atomes. (L'interaction forte assure la cohésion du noyau atomique).

On peut énoncer une caractéristique commune à tous les leptons en général, donc aux muons en particulier : leur spin est un demi-entier. Les muons font partie de la classe des leptons chargés. Ils sont donc associés à une particule neutre : le neutrino, formant ainsi une famille (μ, ν_μ) . Avec la famille (τ, ν_τ) ils constituent la matière instable alors que (e, ν_e) constitue la matière stable.

Les muons sont chargés, ceci les rend sensibles à la force électromagnétique. Cette propriété permet de les détecter. Leur masse est 207 fois plus grande que celle de l'électron soit 105.6 MeV Soit $1.87 \cdot 10^{-28}$ g (par la célèbre formule $E=mc^2$) c'est pour cela que l'on appelle parfois les μ^- des électrons lourds.

c) Présentation des muons cosmiques :

En 1937 Carl Anderson (nobélisé pour sa découverte des positrons en 1932) et Seth Neddermeyer découvrirent les muons dans les rayons cosmiques. Ils utilisèrent un morceau de platine d'un centimètre d'épaisseur placé dans une chambre de Wilson. Ce dispositif leur permit de découvrir des traces de particules pour lesquelles l'énergie perdue était presque indépendante de l'énergie totale de la particule. Ils avaient découvert le muon.

Nous venons de voir que les muons naturels sont relatifs aux rayons cosmiques. Les rayons cosmiques sont connus depuis 1910. Ils forment un flux composé à 85% de protons, à 14% d'hélium, et à 1% d'électrons et autres noyaux atomiques. L'énergie moyenne de ces particules est d'un GeV (c'est-à-dire l'énergie d'un électron accéléré par une différence de potentiel d'un milliard de volts) mais elle peut atteindre jusqu'à 10^{11} GeV .

On pense que les rayons cosmiques sont issus de l'explosion d'une supernova. Le soleil est une autre source de rayon cosmique mais dans ce cas les particules sont beaucoup moins énergétiques (<1 GeV).

Un muon cosmique naît de la désintégration d'un proton cosmique en un pion (π^+ ou π^-) qui se désintègre à son tour en 1 muon et 2 neutrinos (il se peut aussi que le pion se désintègre en une paire de photons). Enfin le muon se désintègre comme il suit :

$$\mu \rightarrow e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$$

On obtient un positron si l'on a un muon positif ou un électron si l'on a un muon négatif. Ces désintégrations sont dues à des interactions fortes entre particules et noyaux atomiques.

Cette dernière désintégration explique la durée de vie assez brève du muon ($2 \cdot 10^{-6}$ s. en moyenne) mais malgré tout assez longue pour être observée sur terre et même pénétrer l'écorce terrestre. En fait le muon cosmique est très rapide car très énergétique (3 GeV en moyenne) : il va à 0.997 fois la vitesse de la lumière. Il bénéficie alors d'un effet relativiste qui augmente sa durée de vie dans notre référentiel.

Le spectre, c'est-à-dire l'énergie en fonction du nombre de muons est continu. Il varie entre autre avec l'altitude et la localisation géophysique. En dessous d'un GeV il est presque plat puis quand on atteint 10 GeV il chute en $p^{-2.7}$ (où p est l'impulsion de la particule).

Le flux peut être défini comme un taux par unité de temps par unité de surface. Il dépend du moment de la particule et de son angle d'incidence. Il est maximum au zénith puis il diminue comme $(\cos(\theta))^2$ où θ est l'angle par rapport à la verticale. Le flux mesuré au niveau de la mer par un détecteur horizontal est de $10\,000\text{m}^{-2}\text{min}^{-1}$.

CHAPITRE 2 : INTERACTION DES PARTICULES CHARGEES AVEC LA MATIERE :

a) Présentation des différentes interactions entre particules chargées et matière :

En générale, une particule chargée subit deux effets lorsqu'elle traverse la matière :

- La particule perd de l'énergie : elle est ralentie.
- La particule est déviée de sa trajectoire incidente.

Ces effets sont principalement le résultat de deux processus :

- La particule rentre en collision inélastique avec les électrons liés aux atomes constituant la matière traversée.
- La particule subit une diffusion élastique quand elle heurte les noyaux des atomes constituant la matière traversée.

De plus, pour les particules chargées incidentes de très grande énergie il faut prendre en compte d'autres phénomènes :

- La particule émet des radiations chérenkovs.
- La particule subit le bremsstrahlung : elle émet des radiations qui la freinent.
- La particule participe à différentes réactions nucléaires.

Nous ne traiterons pas de ces phénomènes rares qui ont une importance mineure dans les techniques de radiographie que nous présenterons dans le prochain chapitre.

Les collisions élastiques entre noyaux et particules et les collisions inélastiques entre électrons et particules ont lieu plusieurs fois par unité de matière traversée. Elles ont donc un effet cumulatif.

Pour bien d'écrire les interactions entre matière et particules il faut en distinguer deux classes :

- Les particules légères : les e^- et les e^+ .
- Les particules lourdes : les muons, les pions, les protons, les particules α et d'autres noyaux légers.

L'énergie perdue par les particules lourdes donc par les muons est presque exclusivement transmise lors de collisions inélastiques avec les électrons du milieu. Ainsi les atomes constituant la matière traversée sont excités ou ionisés.

A chaque collision la particule ne perd qu'une petite partie de son énergie initiale, néanmoins comme les chocs sont très nombreux l'énergie perdue au final ne peut être négligée même dans le cas des matériaux fins. Par exemple, un proton de 10 MeV perd presque toute son énergie dans 0.25 mm de cuivre seulement.

On peut classer ces collisions en deux groupes :

- Les collisions à faible transfert d'énergie.
- Les collisions à grand transfert d'énergie qui mettent assez d'énergie en jeu pour ioniser l'atome dont les électrons ont été percutés.

Parfois l'énergie transférée est si importante que l'électron éjecté a encore assez d'énergie pour ioniser d'autres atomes. Dans ce cas on appelle parfois ces électrons de grande énergie des rayons δ .

Ces collisions sont si nombreuses qu'il n'y a quasiment aucune fluctuation de l'énergie perdue par la particule incidente. Il est donc efficace de calculer l'énergie moyenne perdue par unité de longueur pour d'écrire le phénomène. Cette quantité est appelée pouvoir stoppant : $\frac{dE}{dx}$. Elle a été calculée pour la première fois par Bohr à l'aide de la mécanique classique puis Beth et Bloch en ont donné une meilleure formulation en prenant en compte les effets quantiques.

b) Calcul du pouvoir stoppant par Niels Bohr : mécanique classique :

On considère une particule lourde (comme un muon) de charge z_e , de masse M et de vitesse v traversant un milieu matériel et on suppose qu'il y a un e^- atomique à une distance b de la trajectoire de la particule. (voir fig.2.1). On suppose que l'électron est libre et initialement au repos et qu'il bouge très lentement durant l'interaction avec la particule lourde. De cette façon le champ électrique agissant sur l'électron peut être confondu avec celui de la position initiale. De plus, on suppose qu'il n'a pas été déviée de sa trajectoire originale car sa masse est très grande devant celle de l'électron. C'est cette raison qui nous pousse à différencier le comportement des particules lourdes et légères.

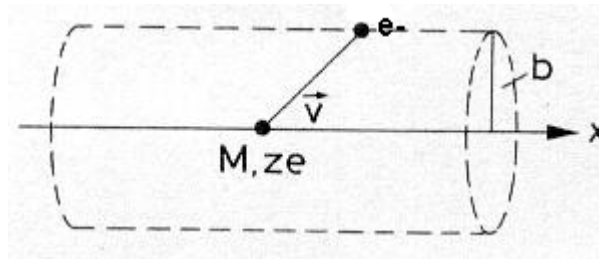


Fig 2.1 : Collision d'une particule lourde chargée avec un électron atomique.

Calculons l'énergie reçue par l'électron en évaluant l'impulsion qui lui est transférée lors de la collision avec la particule lourde. Ainsi :

$$I = \int F dt = e \int E_{\perp} dt = e \int E_{\perp} \frac{dt}{dx} dx = e \int E_{\perp} \frac{dx}{v}$$

Seule la composante E_{\perp} du champ électrique perpendiculaire à la trajectoire de la particule lourde est prise en compte du fait de la géométrie du problème.

On calcule l'intégrale de E_{\perp} grâce au théorème de Gauss appliqué à un cylindre infiniment long centré sur la trajectoire de la particule et passant par la position de l'électron :

$$\int \vec{E} \cdot d\vec{s} = 4\pi Q_{\text{int}} \Leftrightarrow \int E_{\perp} 4\pi b dx = 4\pi z_e \Leftrightarrow \int E_{\perp} dx = \frac{2z_e}{b}$$

Ainsi :

$$I = \frac{2ze^2}{bv}$$

L'énergie gagnée par l'électron est :

$$\Delta E(b) = \frac{I^2}{2m_e} = \frac{2z^2e^4}{m_ev^2b^2}$$

Si l'on considère N_e la densité d'électron, l'énergie perdue pour tous les électrons localisés à une distance située entre b et $b+db$ dans une épaisseur de dx est de :

$$-dE(b) = \Delta E(b)N_edV = \frac{4\pi z^2e^4}{m_ev^2}N_e \frac{db}{b}dx$$

L'élément de volume est : $dV = 2\pi b.db.dx$

Pour avoir la perte totale d'énergie on ne peut pas intégrer sur $[0; +\infty[$ car les collisions éloignées (b grand) n'ont pas lieu sur un intervalle de temps suffisamment court. Si b devient trop grand la formule précédente n'est plus valable.

De même, la formule de ΔE précédemment établie prévoit un transfert d'énergie infini pour $b=0$ ce qui est physiquement impossible. Ainsi la formule précédente n'est pas valable si b devient trop petit.

On prend $[b_{\min}; b_{\max}]$ pour intervalle d'intégration de manière à ce que la formule à intégrer soit valable. L'intégration donne :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2e^4}{m_ev^2}N_e \ln\left(\frac{b_{\max}}{b_{\min}}\right)$$

Calculons b_{\min} . L'énergie maximum transférable lors d'une collision frontale est $\frac{1}{2}m_e(2v)^2$. Si l'on prend en compte la relativité, ceci devient :

$2\gamma^2 m_e v^2$ où $\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ et $\beta = \frac{v}{c}$. En utilisant le résultat précédent sur $\Delta E(b)$ on trouve :

$$(\Delta E(b))_{\max} = \Delta E(b_{\min}) \frac{2z^2 e^4}{m_e v^{22}} = 2\gamma^2 m_e v^2 \Leftrightarrow b_{\min} = \frac{ze^2}{\gamma m_e v^2}$$

Pour le calcul de b_{\max} , il faut prendre en compte le fait que les électrons sont liés aux atomes et qu'ils ont donc une fréquence orbitale ν . Pour qu'un électron absorbe l'énergie de la particule incidente, la perturbation qu'elle crée sur son passage doit être court par rapport à la période $\tau = \frac{1}{\nu}$ de l'électron lié.

Dans le cas de nos collisions le temps d'interaction standard est $t = \frac{b}{v}$. Quand on prend la relativité en compte ce temps devient : $t/\gamma = b/(\gamma v)$. Ainsi :

$$\frac{b}{\gamma v} \leq \tau = \frac{1}{\nu}$$

Comme il y a plusieurs états pour l'électron lié la fréquence ν est une moyenne faite sur tous les états liés notée $\bar{\nu}$. b_{\max} est alors :

$$b_{\max} = \frac{\gamma v}{\bar{\nu}}$$

Le pouvoir stoppant est alors :

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{4\pi z^2 e^4}{m_e v^2} N_e \ln \left(\frac{\gamma^2 m v^3}{ze^2 \bar{\nu}} \right)$$

Cette équation est la formule classique de Bohr. Elle donne une valeur raisonnable de l'énergie perdue par une particule lourde, comme une particule α ou un autre noyau plus lourd, lorsqu'elle traverse la matière. Pour les particules plus légères comme le photon, il faut prendre les effets quantiques en considération. Bethe et Bloch ont traité le problème et ont formulé le pouvoir stoppant comme il est décrit dans la partie suivante.

c) Equation de Bethe-Bloch : Pouvoir stoppant calculé en considérant les effets quantiques :

Equation de Bethe-Bloch :

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 \right]$$

En pratique il faut ajouter deux corrections : la correction d'effet de densité δ et la correction d'effet de bouclier C.

On a alors :

$$-\frac{dE}{dx} = 2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho \frac{Z}{A} \frac{z^2}{\beta} \left[\ln \left(\frac{2m_e \gamma^2 v^2 W_{\max}}{I^2} \right) - 2\beta^2 - \delta - 2\frac{C}{Z} \right]$$

Avec :

$$2\pi N_a r_e^2 m_e c^2 \rho = 0.1535 \text{ MeV} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{g}^{-1}$$

r_e : Le rayon classique de l'électron ($2.817 \times 10^{-13} \text{ cm}$).

m_e : La masse de l'électron.

N_a : Le nombre d'Avogadro ($6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$).

I : Le potentiel d'excitation moyen.

Z : Le nombre atomique du matériau absorbant.

A : Le nombre de masse du matériau absorbant.

ρ : La densité du matériau absorbant.

z : La charge de la particule incidente en unité de e.

$\beta = v/c$ de la particule incidente.

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - \beta^2}.$$

δ : La correction d'effet de densité.

C : La correction d'effet de bouclier.

W_{\max} : L'énergie maximum transférée lors d'une collision unique.

W_{\max} est calculée lors d'un choc frontal. Pour une particule incidente de masse M elle est de :

$$W_{\max} = \frac{2m_e c^2 \eta^2}{1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2} + s^2}$$

Où :

$$s = m_e / M \text{ et } \eta = \beta\gamma$$

De plus si $M \gg m_e$ alors :

$$W_{\max} = 2m_e c^2 \eta^2$$

Car :

$$M \gg m_e \Rightarrow s \approx 0 \Rightarrow 1 + 2s\sqrt{1 + \eta^2} + s^2 \approx 1$$

1) Le potentiel moyen d'excitation :

Le potentiel moyen d'excitation I est le paramètre principal de l'équation de Bethe-Bloch et c'est quasiment la fréquence moyenne orbitale $\bar{\nu}$ multipliée par la constante de Planck h :

$$I \approx h\bar{\nu}$$

En pratique cette quantité est très difficile à calculer. En revanche on a pu déduire les valeurs de I rapporté au Z pour différents matériaux absorbant en mesurant $\frac{dE}{dx}$ et en s'appuyant sur une formule semi empirique. La figure de la page suivante nous les donne en fonction du Z du matériau absorbant :

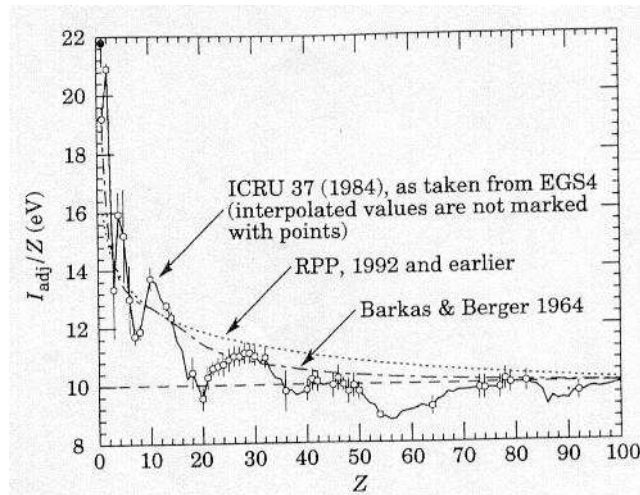


Fig 2.2 : Energies d'excitation (divisé par Z) comme elles ont été adoptées par l' I.C.R.U..

2) La correction due à l'effet de densité :

Les corrections δ de l'équation de Bethe-Bloch sont plus importantes aux hautes énergies.

L'effet de densité augmente quand le champ électrique de la particule tend à polariser les atomes le long de sa trajectoire. Du fait de cette polarisation les électrons les plus éloignés sont protégés du choc. Ils contribuent moins à la perte d'énergie de la particule incidente que ceux qui se trouvent proches de sa trajectoire.

Plus l'énergie de la particule est grande plus l'effet est grand. Ceci explique que l'effet de densité se ressent surtout pour les particules incidente de haute énergie. De plus cet effet dépend de la densité du matériau traversé d'où l'expression « effet de densité ». En effet, plus le matériau traversé est dense, plus la polarisation est importante et plus l'effet de densité se fait ressentir.

La figure 2.3 décrit la formule de Bethe-Bloch avec et sans la correction d'effet de densité.

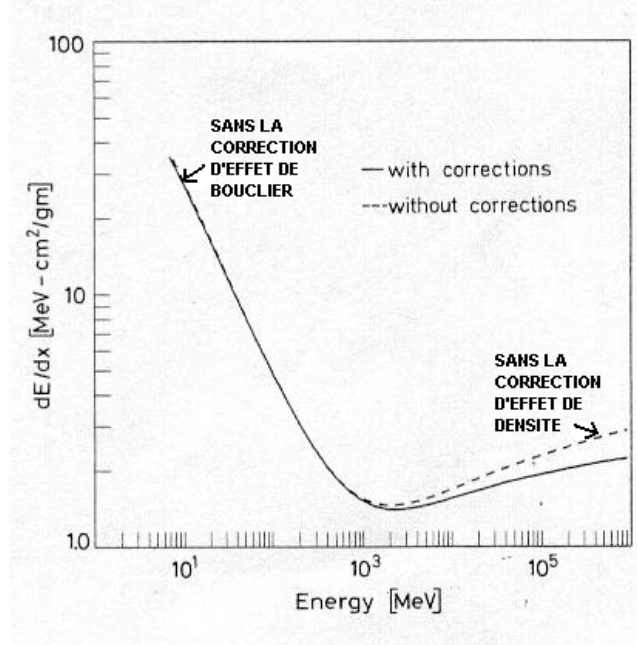


Fig 2.3 : Comparaison pour le cuivre de la formule de Blethe -Bloch avec et sans les corrections dues à l'effet de densité et d'effet de bouclier.

Sternheimer donne une formule pour les valeurs de δ :

$$\begin{aligned} \delta &= 0 & X < X_0 \\ \delta &= 4.6052X + C + a(X_1 - X)^m & X_0 < X < X_1 \\ \delta &= 4.6052X + C & X > X_1 \end{aligned}$$

Où $X = \log_{10}(\beta\gamma)$.

Les quantités X_0, X_1, C, a et m dépendent du matériau absorbant.

On définit C comme :

$$C = -\left(2 \ln\left(\frac{I}{h\nu_p}\right) + 1\right)$$

Où $h\nu_p$ est appelée la fréquence de plasma du matériau :

$$\nu_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\pi m_e}}$$

Où la densité d'électrons est :

$$N_e = N_a \rho Z / A$$

Les constantes X_0, X_1, C, a, m et I sont des données expérimentales. En voici quelques unes :

Matériau	$I[\text{eV}]$	-C	a	m	X_1	X_0
Fe	286	4.29	0.1468	2.96	3.15	-0.0012
Pb	823	6.20	0.0936	3.16	3.81	0.3776
H_2O	75	3.50	0.0911	3.48	2.80	0.2400
BGO (Matériaux présent dans certains détecteurs)	534	5.74	0.0957	3.08	3.78	0.0456

3) La correction due à l'effet de bouclier :

Cette correction prend effet aux basses énergies. Elle intervient quand la vitesse de la particule incidente est comparable à la vitesse des électrons orbitaux liés aux atomes du milieu traversé.

A de telles énergies l'hypothèse suivant laquelle les électrons sont stationnaires par rapport à la particule incidente n'est plus valable. Dès lors l'équation de Bethe-Bloch sans correction ne l'est plus non plus.

On remarque sur la figure 2.3 que cette correction est faible.

Voici une formule empirique donnant C. Elle est valable pour $\eta \geq 0.1$:

$$C(I, \eta) = (0.422377\eta^{-2} + 0.0304043\eta^{-4} - 0.00038106\eta^{-6}) \times 10^{-6} I^2 \\ + (3.850190\eta^{-2} - 0.1667989\eta^{-4} + 0.00157955\eta^{-6}) \times 10^{-9} I^3$$

Où $\eta = \beta\gamma$ et I est l'excitation potentielle moyenne en Ev.

4) Dépendance du pouvoir stoppant à l'énergie initiale de la particule :

La figure 2.4 donne les différents pouvoirs stoppant de différentes molécules en fonction de leur énergie cinétique:

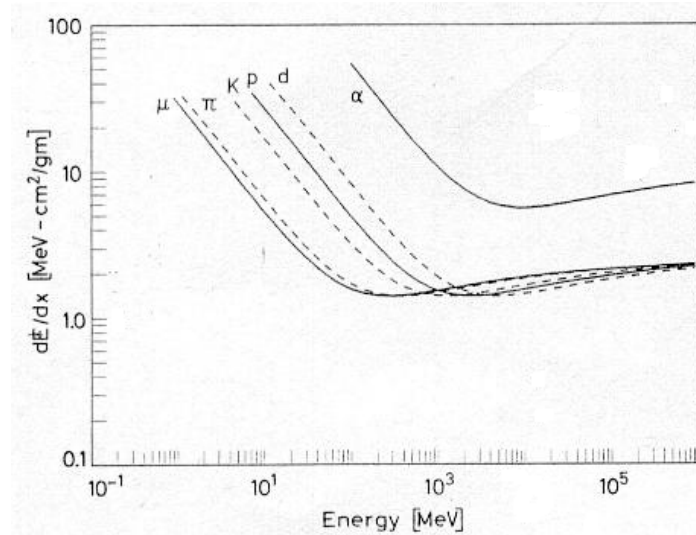


Fig 2.4 : Pouvoir stoppant en fonction de l'énergie pour différentes particules.

Aux énergies non relativistes le facteur dominant de l'équation de Blethe-Bloch est le terme $1/\beta^2$. Le pouvoir stoppant décroît alors quand l'énergie de la particule augmente c'est-à-dire que sa vitesse augmente. Cette diminution a lieu jusqu'à $v \approx 0.96c$. Le minimum est atteint à cette vitesse.

Les molécules qui ont une énergie telle que leur pouvoir stoppant atteigne un minimum sont dites « ionisantes au minimum ». C'est le cas pour de nombreux muons cosmiques ce qui explique qu'ils perdent peu d'énergie en pénétrant la matière et donc qu'ils peuvent la traverser.

On peut noter que le minimum est presque le même quand on considère les molécules de même charge.

Après le passage par le minimum le terme $1/\beta^2$ est presque constant mais le terme logarithmique de l'équation de Bethe-Bloch a tendance à faire augmenter $-\frac{dE}{dx}$: ce phénomène est appelé « augmentation relativiste ». Mais comme on l'a vu dans la partie 2)c)2) la correction due à l'effet de densité a tendance à annuler l'augmentation relativiste.

On remarque qu'à partir du minimum les différents pouvoirs stoppant des différentes molécules (excepté pour les particules α) ont tendance à être les mêmes. En revanche aux plus basses énergies il diffère nettement.

C'est à ces énergies qu'intervient la correction due à l'effet de bouclier que l'on a présenté dans 2)c)3).

Sur la figure 2.4, on n'a pas représenté la zone où la vitesse des particules incidentes est très proche voir inférieure à celle des électrons orbitaux des atomes du matériau traversé. Cette zone est en fait un maximum étroit. Comme on le voit sur la figure plus l'énergie cinétique diminue plus le pouvoir stoppant augmente. Ensuite il chute brutalement mais on ne le voit pas sur la figure du fait de nombreux phénomènes. Dans cette situation le phénomène dominant est celui de la capture des électrons par la particule incidente.

d) Diffusion Coulombienne :

1) Présentation générale du phénomène :

En plus des chocs inélastiques sur les électrons liés aux atomes du matériau traversé, les particules chargées subissent des diffusions élastiques Coulombienne lorsqu'elles heurtent les noyaux. Ces diffusions sont nombreuses même si leur probabilité est plus faible que celle des chocs élastiques avec les électrons.

Si l'on ignore les effets de spin et d'écrantage ces collisions sont décrites individuellement par la formule de Rutherford :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = z_2^2 z_1^2 r_e^2 \frac{mc / \beta p}{4 \sin^4(\theta/2)}$$

Où σ est la section efficace soit probabilité de trouver une particule dans l'angle solide Ω , β est la vitesse de la particule incidente divisée par la célérité de la lumière, p est le moment de la particule incidente en MeV/c et m la masse de la particule diffusée.

En considérant que les noyaux sont beaucoup plus massifs que les particules qui les heurtent on peut négliger la faible quantité d'énergie que ces dernières leur transmettent.

Du fait de sa dépendance en $1/\sin^4(\theta/2)$ l'angle de diffusion de la particule incidente est petit. Par conséquent en traversant le matériau la particule suit un parcours tortueux. Malgré tout l'effet cumulatif de tous les petits angles de déviation entraîne une déflexion nette de la particule par rapport à sa trajectoire initiale. La figure de la page suivante illustre ceci :

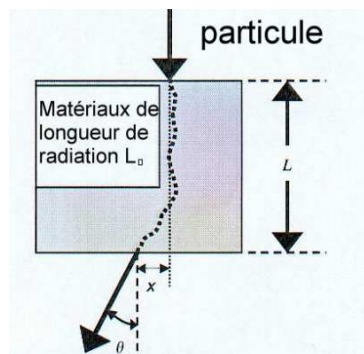


Figure 2.5 : Diffusion multiple de coulomb d'une particule chargée à travers la matière.

En générale on distingue 3 cas de figure pour étudier la diffusion de Coulomb :

- La diffusion simple : si l'absorbeur est très fin de telle manière à ce qu'il y ait très peu de diffusion la formule de Rutherford énoncée précédemment est suffisante.
- La diffusion plurielle : si le nombre moyen de diffusion est inférieur à 20 on est dans le cas d'une diffusion plurielle. C'est le cas le plus difficile à traiter car ni la formule de Rutherford ni les méthodes statistique classique ne peuvent s'appliquer.
- La diffusion multiple : si le nombre moyen de diffusion est supérieur à 20 et que l'énergie perdue par la particule incidente est négligeable on est dans le cas d'une diffusion multiple. On traite ce problème de façon statistique pour obtenir une probabilité de distribution de l'angle net de réflexion en fonction de l'épaisseur du matériau traversé. C'est le cas le plus courant et nous traiterons que celui-ci par la suite.

2) Diffusion multiple de Coulomb :

Il est extrêmement compliqué de calculer la diffusion multiple de façon rigoureuse. Il existe de nombreux calculs plus ou moins sophistiqués mais on utilise couramment l'approximation des petits angles de Molière.

Molière exprime l'angle polaire de distribution comme une série :

$$P(\theta) d\Omega = \eta d\eta \left(2 \exp(-\eta^2) + \frac{F_1(\eta)}{B} + \frac{F_2(\eta)}{B^2} + \dots \right)$$

Où $\eta = \theta / (\theta_1 \sqrt{B})$ et $\theta_1 = 0.3965 (zQ / p\beta) \sqrt{(\rho \delta x / A)}$.

δx est l'épaisseur du diffuseur en cm..

ρ est la densité du diffuseur en $g.cm^{-3}$.

p est le moment de la particule incidente en MeV/c.

β est la vitesse de la particule incidente divisée par la célérité de la lumière.

z est la charge de la particule en unité de e .

Et : $Q = \sqrt{Z(Z+1)}$ pour les électrons et les positrons.

$$Q = Z$$

Avec Z le numéro atomique du matériau traversé.

B est défini par l'équation :

$$g(B) = \ln B - B + \ln \gamma - 0.154 = 0$$

$$\text{Où : } \gamma = 8.831 \times 10^3 \frac{qz^2 \rho \delta x}{\beta^2 A \Delta} \text{ et } \Delta = 1.13 + 3.76 \left(\frac{Zz}{137\beta} \right)^2$$

Avec A le nombre de masse du matériau traversé.

Et $q = (Z+1)Z^{1/3}$ pour les électrons et les positrons.

$q = Z^{4/3}$ pour les autres particules.

Pour un γ donné on peut trouver B de façon numérique en utilisant la méthode de Newton pour trouver les racines de $g(B)$.

Les fonctions $F_k(\eta)$ sont définies par l'intégrale :

$$F_k(\eta) = \frac{1}{k!} \int J_0(\eta y) \exp\left(\frac{-y^2}{4}\right) \left[\frac{y^2}{4} \ln\left(\frac{y^2}{4}\right) \right]^k y dy$$

Où J_0 est la fonction de Bessel. Il existe des tabulation des $F_k(\eta)$.

En général on ne calcul pas plus que les trois premiers termes de la distribution de Molière.

Pour les angles petits cette distribution est proche d'une distribution gaussienne mais il intervient un terme correctif quand les angles augmentent.

3) Approximation gaussienne de la diffusion multiple de Coulomb :

Si nous ignorons la faible probabilité qu'une particule incidente soit dévier d'un grand angle, on peut avoir une bonne idée de la diffusion coulombienne pour des petits angles ($<10^\circ$) en considérant que la particule incidente n'est déviée qu'une seule fois. La distribution du nombre de particules en fonction des angles de diffusion est approximativement gaussienne avec une moyenne nulle et un écart type σ_θ pour la diffusion dans le plan. On a donc :

$$\frac{dN}{d\theta_x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} e^{-\frac{\theta_x^2}{2\sigma_\theta^2}}$$

Avec :

$$\sigma_\theta = \frac{13.6 \text{ MeV}}{\beta c p} \sqrt{\frac{L}{L_0} \left[1 + 0.038 \ln \left(\frac{L}{L_0} \right) \right]}$$

Voir figure 2.5.

Où p représente l'impulsion, βc représente la vitesse de la particule (pour un muon βc est environ de 1, en fait $\beta c \approx c$ mais ici la formule est normalisée), L est la profondeur de la matière et L_0 est la longueur de radiation de la matière.

La longueur de radiation, le parcours caractéristique de la diffusion et des autres interactions électromagnétiques diminuent quand le numéro atomique Z augmente. Par conséquent, pour un matériau et une profondeur de matériau donnés, l'angle moyen de diffusion augmente avec Z .

La distribution des déplacements des rayons dans le plan peut aussi être approximée par une loi de distribution gaussienne avec la déviation standard suivante :

$$\sigma_x = \frac{L}{\sqrt{3}} \sigma_\theta$$

De plus l'angle de déviation et les déplacements des rayons sont corrélés avec le coefficient de corrélation :

$$\rho_{\theta_x} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Le coefficient de corrélation est compris entre 0 et 1. Plus il est proche de 1 plus les valeurs qui ont permis de le calculer dépendent l'une de l'autre.

Enfin la diffusion dans le plan orthogonal à x est indépendante de celle dans le plan de y. Elle suit la même loi de distribution.

CHAPITRE 3 : RADIOGRAPHIE PAR LES MUONS DES RAYONS COSMIQUE :

a) Radiographie basée sur l'absorption des muons par la matière : principe et historique :

Le spectre des muons est continu on peut donc utiliser l'atténuation différentielle pour radiographier de grands objets, c'est-à-dire que l'on peut mesurer le flux au dessus et en dessous de l'objet à radiographier pour en tirer les informations nécessaires à la reconstitution d'une image.

En 1955 E.P. George fut le premier à envisager cette application : il mesura la profondeur de la roche au-dessus d'un tunnel grâce à l'atténuation du flux de muons cosmiques. Plus précisément il mesura le flux de muons à l'intérieur du tunnel puis à l'extérieur et grâce au rapport des deux signaux il déduisit la profondeur de la roche.

En 1970, Luis Alvarez s'inspira du travail de George pour radiographier la seconde pyramide de Giza. Dans les années qui suivirent plusieurs chercheurs utilisèrent l'atténuation des rayons cosmiques pour radiographier des structures de grande taille ou les structures géographiques : Minato utilisa le décompte des rayons cosmiques pour radiographier une grande porte de temple.

Nagamine continue activement ses recherches qui permettront de prédire les éruptions volcaniques par la radiographie à atténuation des rayons cosmiques. Frlez a rapporté récemment qu'il utilisait des méthodes basées sur le pistage des rayons cosmiques à travers des cristaux d'iodide de césium pour en contrôler la qualité.

b) Radiographie basée sur la diffusion des muons cosmiques dans la matière :

1) Avantages et applications :

La radiographie utilisant la diffusion des muons cosmiques présente un certain nombre d'avantage sur la technique classique très répandue de la radiographie utilisant l'absorption et la diffusion des rayons X. Tous d'abord les rayons X cessent de pénétrer la matière quand sa densité excède 25g cm^{-2} alors que les muons pénètrent tous les matériaux. Les muons permettent donc de radiographier tous les objets quelque soit leur nature.

Pour la radiographie classique on est aussi limité par la taille des objets à radiographier car on ne peut pas trop étendre la source de rayons X, tandis que la source de muons cosmiques est aussi étendue que l'on souhaite.

De plus pour la radiographie à rayon γ il faut changer la source à chaque fois qu'elle atteint la moitié de sa durée de vie c'est-à-dire tous les 5 ans par exemple pour le cobalt 60 qui est le plus utilisé dans ce type de radiographie.

On peut aussi noter que les rayons X et les rayons γ sont nocifs pour la santé.

Enfin, dans le cas de la radiographie classique il faut faire plusieurs radiographies sous des angles différents pour reconstituer une image en trois dimensions alors qu'avec la radiographie basée sur la diffusion des muons cosmiques une seule prise de mesure est nécessaire.

Comme nous l'expliquerons dans la suite cette nouvelle technique permet de discriminer les objets en fonction du numéro atomique Z du matériau dont il est fait et de reconstituer son image. Dès lors on pourra repérer un morceau d'uranium (Z élevé) dans une cargaison de Z quelconque. Ceci promet de beaux résultats en ce qui concerne la lutte anti-terroriste et plus précisément la surveillance des frontières.

2) Principe :

a) Information fournie par la diffusion :

Comme on l'a déjà vu le phénomène physique qui va nous permettre d'obtenir des informations est la diffusion multiple de Coulomb. Pour définir la grandeur porteuse de l'information on utilise σ_θ la déviation standard dans la loi gaussienne suivante :

$$\frac{dN}{d\theta_x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_\theta} e^{-\frac{\theta_x^2}{2\sigma_\theta^2}}$$

Elle permet de différencier les matériaux selon leur Z car la longueur de radiation dépend de Z donc l'angle de diffusion dépend de Z . Pour une épaisseur de matériau donnée, plus le Z est grand plus le rayon est dévié (plus l'angle de diffusion est grand).

On définit trois groupes de matériaux selon leur Z : Z faible (eau, plastique, ciment), Z moyen (fer, cuivre), Z élevé (plomb, tungstène). Comme la diffusion des muons diffère de façon significative dans les 3 groupes de matériau précédents on peut approximer l'angle de diffusion moyen en négligeant le terme logarithmique de l'expression du (1). Ceci donne :

$$\sigma_{\theta} \cong \frac{13.6}{p} \sqrt{\frac{L}{L_0}}$$

Nous établissons alors un moment nominal pour le muon (3 GeV par exemple) et nous définissons le carré moyen de la diffusion :

$$\lambda_{mat} = \left(\frac{13.6}{p_0} \right)^2 \frac{1}{L_{0,mat}} \cong \sigma_{\theta_0,mat}^2$$

Ce paramètre, que nous appellerons pouvoir de diffusion, dépend seulement de la longueur de radiation du matériau et varie fortement avec son Z comme le montre la figure 3.1 de la page suivante :

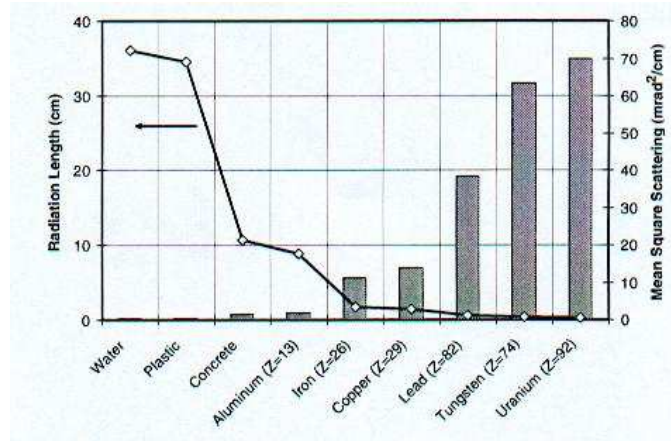


Figure 3.1: longueur de radiation et carré moyen de la diffusion (appelé pouvoir de diffusion dans le texte) par unité de profondeur pour des muons de 3 GeV à travers divers matériaux. la figure illustre la dépendance de ces 2 grandeurs par rapport au Z du matériau traversé.

C'est donc ce pouvoir de diffusion qui permet d'identifier le matériau à analyser. Pour conclure sur la composition d'un objet test nous devons mesurer la diffusion de N muons passant à travers l'objet. Pour cela nous pouvons évaluer le pouvoir de diffusion en calculant la moyenne carrée normalisée des moments de diffusion. Si pour chaque muon nous mesurons la diffusion dans 2 plans orthogonaux x et y et si nous connaissons la longueur du chemin L_i et le moment p_i de chaque muon à travers le matériau nous avons :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i^2}{p_0^2} \cdot \frac{\theta_{xi}^2 + \theta_{yi}^2}{2L_i} \right)$$

On montre facilement que l'incertitude de notre estimation est :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cong \sqrt{\frac{1}{N}}$$

Soit un cube de 10cm du matériau à tester : il est raisonnable de penser que 100 muons le traverseront si on laisse passer 1 minute, l'incertitude sur l'angle de diffusion sera alors de 10% à un sigma de confiance.

En réalité il faut être conscient que l'on ne peut pas connaître le moment p d'un muon avec une précision infinie au mieux on peut en connaître une approximation :

$$p \approx \bar{p}$$

Soit $\Delta p/p = EP$ l'incertitude sur le moment du muon, on a alors :

$$\hat{\lambda} = \frac{1}{N(1+E_p^2)} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\bar{p}_i^2}{p_0^2} \cdot \frac{\theta_{xi}^2 + \theta_{yi}^2}{2L_i} \right)$$

Globalement cette équation nous montre que l'incertitude sur le pouvoir de diffusion augmente autour de la valeur suivante :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cong \sqrt{\frac{1}{N}}$$

On peut noter que l'on doit connaître le moment du muon pour calculer le pouvoir de diffusion. Pour cela il existe une technique qui utilise un sandwich de plaques détentrices séparées par des plaques d'un matériau connu et d'une épaisseur connue. En mesurant la diffusion des particules à travers ces plaques nous pouvons estimer son moment. Nous obtenons 2 mesures de diffusion par plaque. L'incertitude attendue sur la mesure du pouvoir de diffusion est alors de :

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \cong \sqrt{\frac{1}{N}} \sqrt{\frac{M-1}{M-4}} \quad M > 4$$

Avec M le nombre de mesures. Quand M=4 cette incertitude est théoriquement infinie si toutefois la gamme des moments que peuvent prendre les muons est infinie.

En fait, on trouve, grâce à des simulations effectuées sur à peu près 1 000 000 muons, que l'incertitude quand M=4 est typiquement le double de celle quand M=6.

Dans le cas M=6, pour un cube échantillon de 10 cm exposé pendant 1 minute aux rayons cosmiques, l'incertitude sur le pouvoir de diffusion est de 10%. De plus le moment est parfaitement connu grâce aux formules 6 et 7.

Si en revanche on estime que la mesure utilise 3 plaques de diffusion, l'incertitude atteint 16%. Ces résultats sont déduits des équations 8 et 9.

Dans tous les cas ces chiffres restent convenables pour dissocier les matériaux de Z grand, moyen ou faible.

Par exemple considérons 3 blocs : un en béton, un en fer et un en uranium. Nous supposons que 100 particules les traversent en une minute d'exposition. Nous utiliserons 3 plaques de diffusion pour l'estimation des moments. Pour le bloc de béton nous prévoyons un pouvoir de diffusion d'environ 1.6 avec 3 *sigmas* (*sigma est la variance*) de confiance ce qui représente un intervalle d'incertitude de [0.8, 2.3]. L'intervalle de confiance pour le bloc de fer est de [5.9, 16.5], pour le bloc d'uranium il est de [36.7, 103.1]. On peut donc clairement différencier les 3 blocs en 1 min..

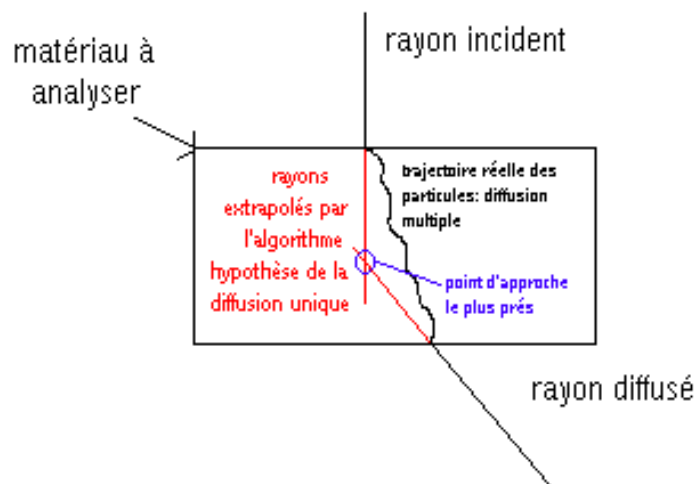
Rq : le sigma de confiance est un résultat de physique statistique : en admettant que l'erreur faite sur la mesure est gaussienne, la construction d'un intervalle de confiance à partir de la variance permet de préciser la probabilité pour que le résultat de cette mesure soit compris dans cet intervalle. Par exemple pour 1 sigma de confiance, c'est à dire un intervalle de $[M - \sigma, M + \sigma]$ avec M la valeur exacte, la probabilité pour qu'effectivement la mesure soit dans cet intervalle est de 66%.

b) Algorithmes de reconstitution de l'image :

1) L'algorithme PoCA :

L'algorithme PoCA (Point of Closest Approach : point d'approche le plus près) permet de reconstituer l'image des objets radiographiés. Pour le mettre en œuvre on fait l'hypothèse qu'il n'y a qu'une seule déflexion dans le matériau. En réalité il y en a plusieurs mais cette hypothèse est d'autant plus valable que l'objet à radiographier est petit.

En deux dimensions le point d'approche le plus près est le point d'intersection du rayon incident, extrapolé grâce à l'hypothèse précédente, et du rayon diffusé, extrapolé de la même façon :



En trois dimensions il se peut que les deux rayons ne se coupent pas. On définit alors intuitivement le point d'approche le plus près comme le point étant à égale distance de la droite représentant le rayon incident et de la droite représentant le rayon diffusé tout en étant le plus proche de ces deux trajectoires. Nous reviendrons plus en détail sur cette notion dans la deuxième partie.

Ensuite le pouvoir de diffusion est calculé et il est attribué au voxel contenant le point d'approche le plus près et 0 est assigné aux autres voxels. On réitère l'opération pour tous les muons puis on fait la moyenne des pouvoirs stoppants pour chaque voxel. On déduit ainsi la valeur du voxel. Cette méthode est rappelée sur la figure suivante:

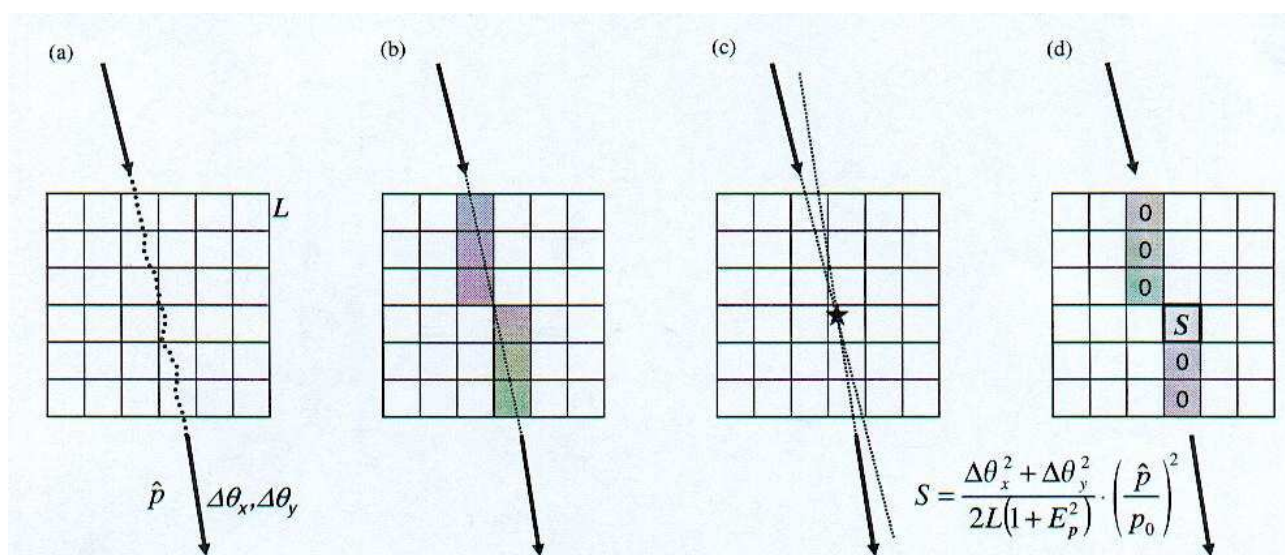


Figure 3.2 : (a) décrit le parcours stochastique d'un muon à travers un volume. Nous mesurons sa diffusion dans 2 plans et nous estimons son moment. (b) illustre l'estimation du parcours du muon et l'identification des voxels que le rayon traverse. (c) localisation du voxel contenant le point d'approche le plus près. (d) illustre le calcul du signal de diffusion S , l'assignation de cette valeur au voxel contenant le point d'approche le plus près et l'assignation de 0 aux autres voxels candidats. Finalement pour reconstituer la distribution du pouvoir de diffusion on prend le signal moyen de tous les muons dans chacun des voxels.

2) Algorithme des « croisement de traces » :

L'algorithme PoCA a quelques inconvénients, notamment si l'on a un matériau dont le Z est grand placé dans un milieu diffusant comme le fer. Dans ce cas il se forme un halo sur l'image. Ce halo va rendre l'image moins nette voire inexploitable. Ce phénomène est dû aux arêtes de l'objet et aux erreurs d'assignement du point d'approche le plus près.

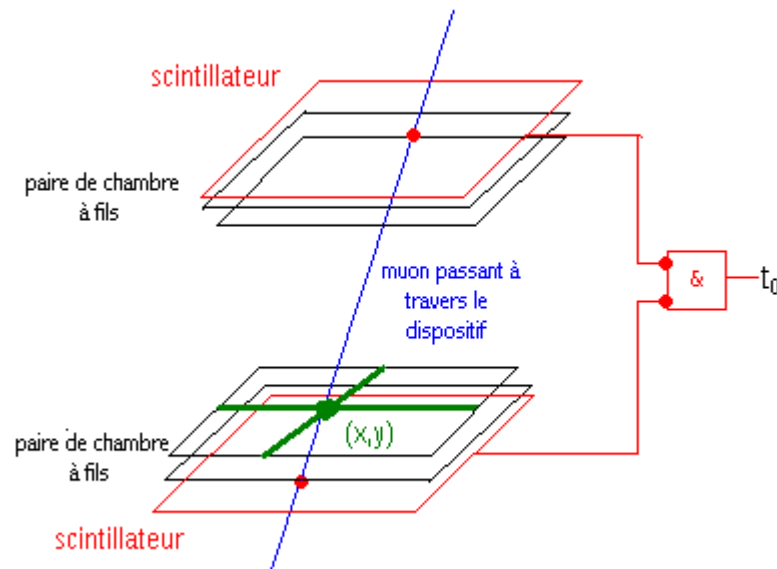
Par contre on remarque qu'un objet épais dont le Z est faible diffuse autant qu'un objet petit dont le Z est grand. Cette observation a permis d'élaborer l'algorithme des « croisement de traces » qui fonctionne à partir d'une liste de traces de muon établie comme il suit:

- Elimination de toutes les trajectoires des muons pour lesquelles la diffusion est inférieure à une valeur spécifique.
- Elimination de toutes les trajectoires qui n'approchent pas d'une autre trajectoire à moins d'une distance spécifique.
- Pour chaque voxel, dans le volume reconstitué, on compte le nombre de paires de rayons qui ont leur point d'approche le plus près d'un autre point d'approche dans le même voxel,
- Normalisation de chaque signal de chaque voxel en divisant le nombre de rayons ainsi obtenu par le nombre de rayon total.
- Enfin mise en lumière des régions dans lesquelles le signal du voxel est supérieur à un seuil spécifique.

c) Expérimentation :

1) Dispositif expérimental et résultats :

Pour fournir une preuve expérimentale de principe une équipe de chercheurs a réalisé une expérience dont le dispositif est le suivant :



Quand un muon traverse la chambre à fils un signal électrique se propage dans le gaz en suivant 2 directions perpendiculaires correspondant aux coordonnées du point d'impact du muon dans le plan de la chambre à fils. Pour valider une telle mesure il faut être certain que le muon ait bien traversé le volume à radiographier les chambres à fils situées au-dessus et celles situées en dessous. Pour cela on fait un & logique entre les signaux électriques (issus de la transformation des signaux lumineux) de deux scintillateurs situés respectivement au-dessus des chambres à fils supérieures et en dessous des chambres à fils inférieures. Quand les deux signaux sont à 1 le muon est bien passé à travers le volume à radiographier et à travers les 4 chambres à fils : la mesure est prise en compte. De plus, ce signal sert à définir l'instant initial t_0 .

L'angle solide de cet appareillage limite le taux d'événements à une fraction du taux de muons disponibles. De plus il manque la mesure du moment des muons traversant le volume à analyser ce qui limite encore la précision de la reconstruction de l'image. Malgré tout elle reste suffisante pour une preuve de principe.

La figure 3.3 montre 2 objets tests et leur radiographie obtenue grâce aux muons, celle-ci a été produite par notre prototype expérimental et l'algorithme PoCA décrit plus haut :

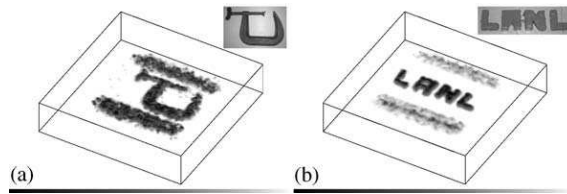


Figure 3.3 : Représentation expérimentale de la radiographie obtenue grâce aux muons des rayons cosmiques. On peut distinguer un serre-joint en acier (a) et les lettres « LANL » construites en plomb (b). Les traces ressemblant à des bars sont dues à des rayons en acier qui supportent une plate-forme en plastique sur laquelle reposent les objets radiographiés.

Les traces qui ressemblent à des barres et qui apparaissent sur la radiographie en dessous et au-dessus des objets tests sont dues à des supports en acier qui soutiennent les objets. Le serre-joint en acier de la figure 5) a) a une épaisseur similaire à celle du support en acier, c'est pour cela qu'il apparaît avec la même intensité sur l'image. Le plomb (il a un Z élevé) qui forme les lettres « LANL » et qui est représenté figure 5) b) produit beaucoup plus de diffusion que les supports en acier (ils ont un Z moyen), ainsi il apparaît plus fortement que ces derniers sur l'image normalisée.

Chacune de ces reconstructions ont été faites en utilisant les données d'environ 100 muons. Ces données ont été collectées pendant plusieurs heures mais un système optimisé avec une grande efficacité et un grand angle solide pourrait acquérir autant de muons en environ 30 minutes. Pour une simple détection « oui/non » (dans le cas des problèmes de détection de contrebande) il faut considérablement moins de muons c'est à dire qu'il faut un temps d'exposition plus faible.

2) Simulation Monte Carlo :

Pour observer comment cette technique fonctionne à plus grande échelle et pour des scénarios plus complexes, des chercheurs ont développé un code de simulation qui génère des muons venant de rayons cosmiques qui ont la même distribution angulaire et énergétique que celle qu'ils ont au niveau de la mer quand ils sont générés dans la nature. Les muons se propagent à travers un volume test, puis à travers des détecteurs qui fournissent leur position.

Pour valider la simulation Monte Carlo ils ont utilisé les résultats d'une expérimentation faite sur un bloc de tungstène. Il a été choisie une situation test où il est disposé 3 blocs de $5 \times 5 \times 5 \text{ cm}^3$ fait respectivement de tungstène (Z grand), de fer (Z moyen) et de carbone (Z faible).

Les chercheurs ont simulé le passage d'environ 100 000 muons à travers l'objet et à travers 3 plaques de fer additionnelles pour mesurer le moment des particules. Finalement, ils ont appliqué l'algorithme de reconstruction PoCA pour remplir le volume avec les pouvoirs de diffusion qui auront été évalués.

Sur la figure suivante on distingue bien les 3 blocs : plus le Z est élevé plus l'image est sombre.

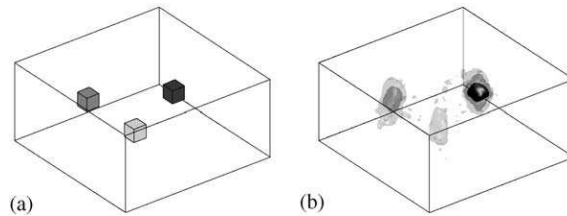


Figure 3.4 : Discrimination des matériaux par leur Z (simulation). Les objets sont représentés en (a) : ceux sont 3 cubes de $5 \times 5 \times 5 \text{ cm}^3$, l'un est tungstène (son Z est grand, c'est le plus foncé des trois cubes), l'autre en fer (son Z est moyen, il est moins foncé), le dernier en carbone (son Z est petit, c'est le moins foncé). La figure (b) illustre la simulation de la radiographie de la figure (a). La position de chaque objet et la différence entre leur Z sont clairement représentés.

Cet algorithme «croisement de traces» a été appliqué à la simulation de la cargaison d'un container de $6 \times 2.4 \times 2.4 \text{ m}^3$ dont les parois sont en acier et font 3 mm d'épaisseur. Celle-ci est composée d'approximativement 12 tonnes de fer, distribuées uniformément afin de simuler des pièces en fer. La densité massive de 0.3 g.cm^{-2} représente la limite de charge pour un container d'expédition standard. Dans le fer il a été enseveli 3 briques d'uranium de $9 \times 9 \times 12 \text{ cm}^3$.

Ils ont simulé l'exposition aux muons des rayons cosmiques pendant 1min. Ils ont procédé à la simulation des traces des muons avec l'algorithme des «croisement de traces ».

La figure 7 b) montre notre reconstitution de contrôle. On y voit la cargaison de fer sans les briques : l'image est vide de tout signal : figure 7 b) et la cargaison avec les briques : on les distingue parfaitement : figure 7 a) page suivante :

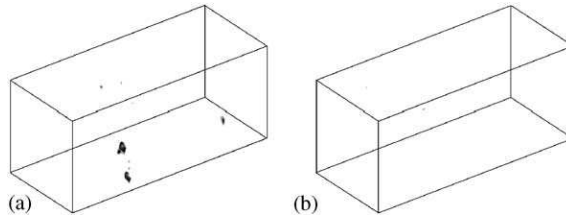


Figure 3.5 : (a) simulation d'une radiographie par les muons des rayons cosmiques d'un container de $6*2.4*2.4 \text{ m}^3$ rempli de 12 tonnes de fer répartie dans tout le volume et où l'on a dissimulé 3 briques d'uranium faisant chacune $9*9*12 \text{ cm}^3$. (b) représente le même container sans les briques d'uranium. Le temps d'exposition est d'une minute. Ces reconstitutions ont été faites avec l'algorithme de détection à «croisement de traces».

Dans cette partie je résous des problèmes qui interviennent lors de la reconstitution de l'image par l'algorithme PoCA.

On verra tout d'abord comment voxeliser un volume. Puis nous calculerons les coordonnées du point d'approche le plus près.

Les données nécessaires à la reconstitution de l'image et donc à la résolution de ces problèmes sont le résultat d'une simulation qui modélise le passage de 10 000 muons à travers un objet dans un volume à radiographier.

CHAPITRE 4 : TRAVAIL SUR LA RECONSTITUTION DE L'IMAGE :

a) Voxelisation :

Comme on l'a vu précédemment la reconstitution de l'image nécessite de partager le volume à radiographier en voxels.

Les voxels sont de petits cubes d'arête $\Delta x = \Delta y = \Delta z$ qui ont le même rôle que les pixels.

Pour repérer les voxels dans l'espace on leur attribue 3 entiers : (I, J, K). Chaque triplet définit une zone de l'espace délimité par le voxel lui correspondant. Ici par exemple le centre du volume est représenté par (0, 0, 0). Si on se déplace du point central (0, 0, 0) situé au centre du voxel (0, 0, 0) d'une distance égale à Δx dans les trois directions du repère cartésien on se trouvera au centre du voxel (1, 1, 1).

Comme on veut connaître dans quel voxel se trouve le point d'approche le plus près on exprime (I, J, K) en fonction de (x, y, z) coordonnées du point d'approche le plus près qui seront calculées dans la suite.

On trouve facilement la relation liant I et x par un raisonnement sur l'axe (0, x). On déduit J en fonction de y et K en fonction de z par le même raisonnement sur les deux autres axes du repère cartésien. Voilà ces trois relations :

$$\begin{aligned} I &= \text{sgn}(x) E \left(\frac{|x| + \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} \right) \\ J &= \text{sgn}(y) E \left(\frac{|y| + \frac{\Delta y}{2}}{\Delta y} \right) \\ K &= \text{sgn}(z) E \left(\frac{|z| + \frac{\Delta z}{2}}{\Delta z} \right) \end{aligned}$$

Où E est la partie entière.

b) Point d'approche le plus près :

Maintenant nous allons voir comment définir le point d'approche le plus près et voir comment calculer ses coordonnées. Enfin nous donnerons l'organigramme du programme informatique que ce travail préalable nous a permis d'obtenir.

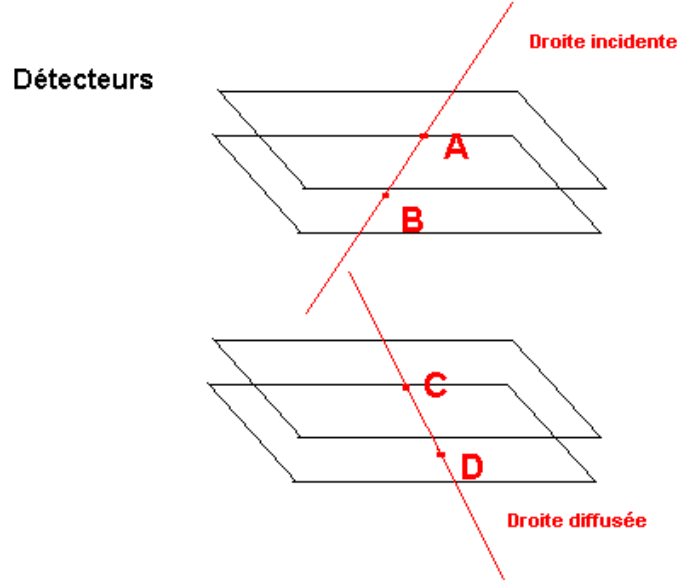
1) définition :

La simulation qui a été faite pour des muons traversant le volume à radiographier et les deux paires de détecteur placées respectivement en dessous et au dessus nous fournit les informations suivantes :

- Le point où le muon frappe le premier détecteur est le point $A(x_1, y_1, z_1)$: où x_1 et y_1 sont des coordonnées calculées par le programme de simulation. z_1 est la hauteur où se trouve le premier récepteur.
- Le point où le muon frappe le second détecteur placé à au dessus du volume à radiographier est le point $B(x_2, y_2, z_2)$. Les trois coordonnées sont obtenues de la même façon.
- Le point où le muon frappe le troisième détecteur qui est le premier que rencontre le muon une fois qu'il a traversé le volume à radiographier est le point $C(x_3, y_3, z_3)$. Les trois coordonnées sont obtenues de la même façon.
- Le point où le muon frappe le dernier récepteur est le point $D(x_4, y_4, z_4)$. Les trois coordonnées sont obtenues de la même façon.

Les points A et B définissent une droite qui représente la trajectoire incidente du muon. On appellera cette droite D_{inc} .

Les points C et D définissent une droite qui représente la trajectoire du muon une fois qu'il a traversé le volume à radiographier c'est-à-dire une fois qu'il a été diffusé. On appellera cette droite D_{diff} .



Les équations de D_{inc} et D_{diff} sont les suivantes :

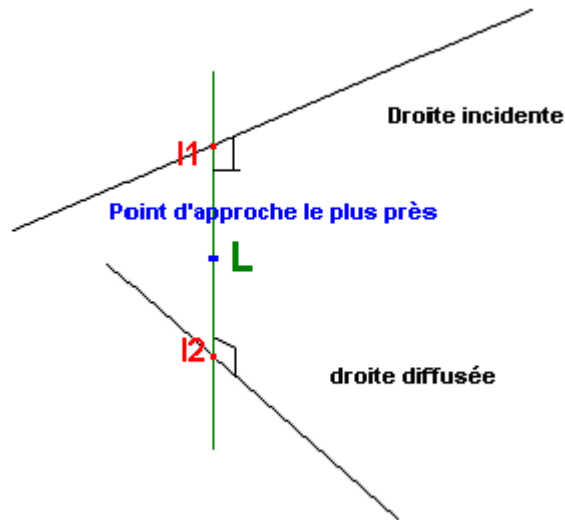
$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_{inc} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \\ z_2 - z_1 \end{pmatrix} = A + R \vec{u} = A + R \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in D_{diff} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} x_4 - x_3 \\ y_4 - y_3 \\ z_4 - z_3 \end{pmatrix} = A + R \vec{v} = A + R \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

Comme ces deux droites ne se coupent pas forcément on définit le point d'approche le plus près comme le milieu du segment le plus court reliant D_{inc} et D_{diff} , ou encore le milieu du segment formé par les points d'intersection de D_{inc} et D_{diff} avec la droite perpendiculaire à D_{inc} et à D_{diff} . Ces deux points sont respectivement appelés I_1 et I_2 . La droite perpendiculaire à D_{inc} et à D_{diff} ainsi définie est L . Le vecteur directeur de L est :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - v_x u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix}$$

La figure suivante décrit la situation :



Néanmoins il faut s'assurer que le vecteur directeur de L n'est pas nulle sinon ça signifierait que \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires dès lors D_{inc} et D_{diff} forment une seule et unique droite et il n'y a pas de point d'approche le plus près ou alors D_{inc} et D_{diff} sont parallèles et il y en a une infinité.

2) Calcul des coordonnées de I1 et I2 :

Traisons en détail le calcul des coordonnées de I₁, celui des coordonnées de I₂ est similaire.

I₁ est l'intersection de trois plans :

- Le plan contenant D_{inc} et L que l'on appelle Π₁.
- Le plan contenant D_{diff} et L que l'on appelle Π₂.
- Un plan quelconque différent de Π₁ contenant D_{inc} que l'on appelle Π₃.

Le plan Π₁ contenant A est dirigé par (\vec{u}, \vec{v}) a pour équation :

$$\begin{aligned} M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \Pi_1 &\Leftrightarrow \text{Det} \begin{pmatrix} x-x_1 & \alpha_x & u_x \\ y-y_1 & \alpha_y & u_y \\ z-z_1 & \alpha_z & u_z \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = (x-x_1)[\alpha_y u_z - u_y \alpha_z] - (y-y_1)[\alpha_x u_z - u_x \alpha_z] + (z-z_1)[\alpha_x u_y - u_x \alpha_y] \\ &\Leftrightarrow 0 = (x-x_1)A_1 - (y-y_1)B_1 + (z-z_1)C_1 \\ &\Leftrightarrow 0 = A_1 x - B_1 y + C_1 z - A_1 x_1 + B_1 y_1 - C_1 z_1 \Leftrightarrow 0 = A_1 x - B_1 y + C_1 z + D_1 \end{aligned}$$

De même l'équation caractéristique du plan Π₂ contenant C et dirigé par (\vec{w}, \vec{v}) est donnée par :

$$0 = A_2 x - B_2 y + C_2 z + D_2$$

Avec :

$$\begin{aligned} A_2 &= [\alpha_y v_z - v_y \alpha_z] \\ B_2 &= [\alpha_x v_z - v_x \alpha_z] \\ C_2 &= [\alpha_x v_y - v_x \alpha_y] \\ D_2 &= B_2 y_3 - C_2 z_3 - A_2 x_3 \end{aligned}$$

Enfin on trouve l'équation de Π_3 . Ce plan contient le point A et il est dirigé par \vec{u} et un vecteur quelconque différent de \vec{u} . On prend comme vecteur quelconque $\vec{u} \wedge \vec{w}$. De cette façon on est sûr que l'équation de Π_3 sera différente de celle de Π_1 et Π_2 car ces plans sont alors perpendiculaires et que \vec{u} sera différent du vecteur quelconque ainsi choisi.

$$\vec{u} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y \alpha_z - u_z \alpha_y \\ u_z \alpha_x - u_x \alpha_z \\ u_x \alpha_y - \alpha_x u_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix}$$

L'équation caractéristique du plan est alors :

$$0 = A_3x - B_3y + C_3z + D_3$$

Avec :

$$A_3 = [\beta_y u_z - u_y \beta_z]$$

$$B_3 = [\beta_x u_z - u_x \beta_z]$$

$$C_3 = [\beta_x u_y - u_x \beta_y]$$

$$D_3 = -A_3x_1 + B_3y_1 - C_3z_1$$

Une fois que l'on connaît les 3 plans il faut trouver I_1 leur point d'intersection. Pour cela on résout le système de trois équations à trois inconnues constituées par les équations caractéristiques des 3 plans Π_1 , Π_2 , Π_3 indiquées sur la page suivante :

$$0 = A_1x - B_1y + C_1z - D_1$$

$$0 = A_2x - B_2y + C_2z - D_2$$

$$0 = A_3x - B_3y + C_3z - D_3$$

On résout ce système à l'aide d'un algorithme en langage C qui est basé sur la méthode du pivot de Gauss. Voici cet algorithme :

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>

int main()
{
float a[3][3],b[3],dp,temp,d,x[3],som; // Déclaration des variables
int i,j,l,k;

for(i=1;i<=3;i++) // On entre les coefficients devant les inconnues
// et la valeur prise par la combinaison linéaire
d'inconnues.

// Pour un système à trois inconnues on a:
a[1][1]x+a[1][2]y+a[1][3]z=b[1]
a[2][1]x+a[2][2]y+a[2][3]z=b[2]
a[3][1]x+a[3][2]y+a[3][3]z=b[3]

{
for(j=1;j<=3;j++)
{
printf("rentrez la valeur de a[%d][%d] \n",i,j);
scanf("%f",&a[i][j]);
}
printf("rentrez la valeur de b[%d] \n",i);
scanf("%f",&b[i]);
}

for(i=1;i<=3;i++) // On affiche le système sous la forme:
a[1][1] a[1][2] a[1][3] : b1
a[2][1] a[2][2] a[2][3] : b2
a[3][1] a[3][2] a[3][3] : b3

{
for(j=1;j<=3;j++)
{
printf("%f ",a[i][j]);
}
printf(" | %f \n",b[i]);
}
}
```

```

for(k=1;k<=2;k++)
{
    if (a[k][k]!=0)
        // On regarde si il y a un pivot nul.

        // Si il est différent de 0 on peut appliquer
        // la formule qui donne le résultat en utilisant
        // la méthode de gauss.

        {
            dp=1/a[k][k];
        }
        else
            // Sinon on permute les équations dans le
            // système jusqu'à avoir un pivot non nul.

            {
                l=k;
                while (a[l][k]==0)
                {
                    if (l>3)
                        // Si aucun pivot n'est non nul il n'y a pas de
                        solution.

                        {
                            printf("\nPas de solution\n");
                            return 0;
                        }

                    else

                        {
                            l=l+1;
                        }
                }
            }
        for(j=1;j<=3;j++)
        {
            temp=a[k][j];
            a[k][j]=a[l][j];
            a[l][j]=temp;
            temp=b[k];
            b[k]=b[l];
            b[l]=temp;
        }
        dp=1/a[k][k];
    }
}

```

```

for(j=k+1;j<=3;j++) // On applique la méthode de Gauss:on multiplie la
                    // première équation par son pivot puis par
                    // combinaisons linéaires on annule le coefficient de la
                    // première inconnue de toutes les équations suivantes
                    // puis on recommence jusqu'à l'obtention d'un
                    // système triangulaire.
{
    d=a[j][k];

    for(l=k;l<=3;l++) a[j][l]=a[j][l]-(d*dp*a[k][l]);
    b[j]=b[j]-(d*dp*b[k]);
}

x[3]=b[3]/a[3][3]; // On résout le système triangulaire.
for(i=1;i<=2;i++)
{
    som=0;
    for(j=4-i;j<=3;j++) som=som+(a[3-i][j]*x[j]);
    x[3-i]=(b[3-i]-som)/a[3-i][3-i];
}
for(i=1;i<=3;i++) printf("x[%d]=%f \n",i,x[i]); // On affiche les solutions.
return 0;

```

On trouve de la même façon les coordonnées du point I_2 . Seule la définition du plan Π_3 change : c'est maintenant le plan contenant C est dirigé par $(\vec{v}, (\vec{v} \wedge \vec{w}))$:

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y \alpha_z - \alpha_y v_z \\ v_z \alpha_x - \alpha_z v_x \\ v_x \alpha_y - v_y \alpha_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta'_x \\ \beta'_y \\ \beta'_z \end{pmatrix}$$

La nouvelle équation de Π_3 est :

$$0 = A'_3x - B'_3y + C'_3z + D'_3$$

Avec :

$$A'_3 = [\beta'_y v_z - v_y \beta'_z]$$

$$B'_3 = [\beta'_x v_z - v_x \beta'_z]$$

$$C'_3 = [\beta'_x v_y - v_x \beta'_y]$$

$$D'_3 = -A'_3x_3 + B'_3y_3 - C'_3z_3$$

3) Calcul du point d'approche le plus près :

Après résolution des systèmes composés des équations de Π_1 et Π_2 et de Π_3 on connaît :

$$I_1 \begin{pmatrix} x_{I_1} \\ y_{I_1} \\ z_{I_1} \end{pmatrix} \text{ et } I_2 \begin{pmatrix} x_{I_2} \\ y_{I_2} \\ z_{I_2} \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à calculer les coordonnées du point d'approche le plus près $\begin{pmatrix} x_{pp} \\ y_{pp} \\ z_{pp} \end{pmatrix}$ qui ne sont en fait que les coordonnées du milieu du segment $[I_1, I_2]$:

$$x_{pp} = \frac{x_{I_1} + x_{I_2}}{2}$$

$$y_{pp} = \frac{y_{I_1} + y_{I_2}}{2}$$

$$z_{pp} = \frac{z_{I_1} + z_{I_2}}{2}$$

4) Organigramme du programme informatique :

A partir de la résolution précédente j'ai élaboré l'organigramme de la page suivante :

